

THz 频段圆波导传输特性的特征方程分析法

赵重峰, 黄斌科, 师振盛

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对 THz 频段采用金属电导率趋肤效应模型会引入传播常数误差的问题, 提出了一种非理想导体圆波导传输特性的特征方程分析法. 首先基于圆波导中的场方程及电磁场边界条件得到了关于传播常数的特征方程; 其次在特征方程中采用非理想导体电导率的经典弛豫模型, 通过数值求解得到了圆波导的传播常数. 与采用变分法计算传播常数的结果相比, 特征方程法可在全频段上精确表征圆波导的传输特性. 仿真结果表明: 与传统变分法相比, 圆波导特征方程分析法得到的衰减常数相对误差在 10 THz 时可减小 66%; 与传统的金属电导率趋肤效应模型相比, 特征方程分析法采用金属电导率经典弛豫效应模型得到的衰减常数相对误差在 6 THz 时可减小 31%.

关键词: THz 频段; 非理想导体; 圆波导; 特征方程

中图分类号: TN814 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2012)06-0012-05

Characteristic Equation Method for Propagation Properties of Terahertz Wave in Circular Hollow Waveguide

ZHAO Chongfeng, HUANG Binke, SHI Zhensheng

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: For the error of propagation constants with adopting the classical skin-effect model for the conductivity of normal metals in Terahertz frequency, a general and rigorous characteristic equation formulation is proposed for the analysis of hollow metallic waveguide. The characteristic equation for propagation constants is derived in terms of the field components equations and the boundary conditions in the circular waveguide. The propagation constants are obtained with the numerical solutions of the characteristic equation with the classical relaxation-effect model for the conductivity. The proposed method improves the accuracy for the full-wave characterization of waveguide performance, compared with the classical microwave approach that is the variational method with the classical skin-effect model for the conductivity. A comparison with the traditional variational method shows that the relative error of attenuation constant from the proposed method is reduced about 66% at 10 THz., while a comparison with the skin effect model for conductivity shows that the relative error of attenuation constant using characteristic equation method can be reduced by 31% at 6 THz with the classical relaxation model.

Keywords: THz frequency; imperfect conductor; cylindrical waveguide; characteristic equation

THz 波由于其分辨率高、穿透能力强等优势, 在安防、化学成分鉴定、医学成像及射电天文等领域具有重要应用. THz 波传输器件是 THz 系统的核

心器件, 其性能会影响系统对 THz 信号的检测敏感性和 THz 系统的成像分辨率^[1]. 目前, THz 频段沿用光学和微波领域发展起来的波导结构, 由于在

THz 频段下的导体欧姆损耗和介质填充损耗,均会产生大的传输损耗,因此研究低损耗 THz 波导传输线具有实际意义^[2-3]. 圆波导由于其在结构上柔韧性好,易于加工和集成,在电性能上传输损耗较低、色散小、耦合效率高、安全性好,因而在 THz 系统中取得了广泛应用.

Lucyszyn 等^[4]在研究 THz 波段矩形波导损耗时指出,在较高频率下采用常数电导率会过高预估导体损耗,因而提出在 THz 频段需采用金属电导率经典弛豫色散模型. 在 THz 圆波导中,其导体损耗主要由波导中的场分布决定^[5],因此同样需要对 THz 圆波导的非理想导体边界进行精确处理. 但是,目前在 THz 金属圆波导的分析中,对金属电导率的计算往往忽略了其色散特性,这必将在 THz 频段引入误差^[6].

本文在计算圆波导传播常数时采用金属电导率经典弛豫色散模型,并且提出了基于场方程及边界条件得到的特征方程精确分析法. 通过数值计算,得到了 THz 频段圆波导中波的衰减和相移特性,验证了常数电导率模型和变分法计算 THz 波传播常数时存在误差,同时分析了影响圆波导导体损耗的因素,为设计低损耗 THz 圆波导提供了依据.

1 THz 频段导体的电导率参数模型

在射频、微波直至亚毫米波频率下,金属电导率只与温度有关,与频率无关,通常用直流下金属本征体常数电导率 σ_0 表示,如铜的电导率在 20 °C 时为 5.8×10^8 S/m. 在微波频段下计算导体的趋肤厚度时金属电导率采用此常数模型.

室温下精确描述金属频率色散特性的解析模型称为经典弛豫效应模型. 在这种模型下,金属可近似为自由电子气,金属本征体电导率表示为^[4]

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau} \quad (1)$$

式中: σ_0 为直流下的金属电导率; ω 为交流信号角频率; τ 为弛豫时间,指电子平均自由运动 τ 时间后再次发生弹性碰撞,室温下普通金属的弛豫时间 τ 在 10^{-14} 数量级,对从直流到远红外区外加交流信号,电子的弛豫时间与信号频率无关,只与导体本身材料特性及温度有关^[7]. 这种模型首次由 Drude 提出,因此也称为 Drude 模型,金属 Drude 模型的不同参数可通过实验测量得到.

若仅取经典弛豫效应模型式(1)的实部,则称为金属电导率的简单弛豫效应模型,即

$$\sigma_R = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (2)$$

可见简单弛豫效应模型式(2)仍与频率有关.

在采用常数电导率模型和简单弛豫模型时金属电导率为实数,对应的金属表面阻抗、趋肤厚度及波导系统中导波的传播常数的表达式可得到简化. 然而,实验数据表明,在 THz 频段下,特别在其高频段端使用简化的金属电导率模型,会对表征导波传输特性的电特性参数引入较大误差.

2 波导壁为非理想导体圆波导的传播常数

图 1 所示的金属圆波导结构,波导内壁半径为 a ,波导内介质的介电常数和磁导率分别为 ϵ_1, μ_1 ,波数 k_1 满足 $k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1$. 波导壁为非理想导体,认为波导壁厚度无穷大,介电常数、磁导率和电导率分别为 ϵ_2, μ_2 和 σ ,波数 k_2 满足 $k_2^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_2 - j\omega \mu_2 \sigma$.

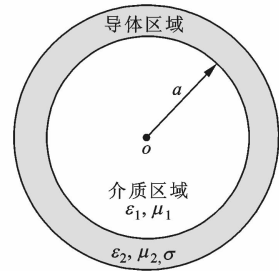


图 1 金属圆波导结构图

2.1 变分法计算传播常数

波导壁为非理想导体时,利用变分法可得到关于传播常数 γ 的方程^[8]

$$C_n \frac{\Gamma_n^2 - \gamma^2}{\Gamma_n} P_m + \sum_{m=1}^N C_m W_{nm} = 0 \quad (3)$$

式中: Γ_n 为理想导体波导第 n 个模式的传播常数; $P_m = \frac{1}{2} \iint_S \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}_n^* \cdot \hat{\mathbf{z}} ds$ 为理想导体波导中导波 n 模式流经波导的功率流,其中 $\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n$ 分别为导波 n 模式的电场强度和磁场强度, $\mathbf{H}_n^*$ 为 $\mathbf{H}_n$ 的共轭; $W_{nm} = \frac{Z_s}{2} \oint_C \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_m^* dl$ 为导波模式 n 与模式 m 的耦合功率,其中 $\mathbf{J}_n, \mathbf{J}_m$ 分别为第 n 和 m 个理想模式的表面电流, $\mathbf{J}_m^*$ 为 $\mathbf{J}_m$ 的共轭, $Z_s = R_s + jX_s = (j\omega\mu_2/(\sigma + j\omega\epsilon_2))^{1/2}$ 为导体的表面阻抗; C_n, C_m 为模式 n 和 m 的系数.

波导中多模传输时,只需使式(3)中关于系数 C_n ($n=1, 2, 3, \dots$) 形成的矩阵方程的矩阵行列式为

0,便得到关于多个模式传输时传播常数 γ 的高阶方程. 当模式 n 单模传输时,存在 $W_m=0(n\neq m)$,则第 n 个模式的传播常数满足

$$\gamma = \gamma_n = j\beta + \alpha = j\beta_n + (1+j) \frac{P_L}{2P_m} \quad (4)$$

式中: β 为相位常数; α 为衰减常数; $P_L = \frac{R_s}{2} \oint_C \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{J}_m^* dl$ 为波导壁的导体功率损耗; P_m 为第 n 个模式的功率流. 由式(4)可见:单模传输时,变分法得到的衰减常数与微扰法一致,但变分法同时给出了导体损耗所引起的相位常数变化,它和衰减常数大小相同,其值与理想导体波导的相位常数相比非常小.

基于变分法及理想导体圆波导中的场解,可得到半径为 a 的圆波导 HE_{11} 模的传播常数

$$\gamma^2 = 2jZ_s a \left(1 + \frac{k_1^2 - k_c^2}{k_c^4 a^2} \right) k_c^4 / \left[\alpha \mu (p_{11}^2 - 1) - (k_1^2 - k_c^4) \right] \quad (5)$$

式中: $p_{11}=1.841\ 2$ 为第 1 类贝塞尔函数导数的第 1 个根; $k_c=p_{11}/a$ 为截止波数. 其余参数与前面定义相同.

2.2 特征方程方法计算传播常数

利用非理想导体圆波导中的场方程及非理想导体与介质界面上的切向场连续条件,可以得到关于导波传播常数 γ 满足的特征方程^[9-10]

$$\left[\frac{\mu_1}{u} \frac{J'_n(u)}{J_n(u)} - \frac{\mu_2}{v} \frac{H_n^{(2)'}(v)}{H_n^{(2)}(v)} \right] \cdot \left[\frac{k_1^2}{\mu_1 u} \frac{J'_n(u)}{J_n(u)} - \frac{k_2^2}{\mu_2 v} \frac{H_n^{(2)'}(v)}{H_n^{(2)}(v)} \right] = n^2 (-\gamma^2) \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right)^2 \quad (6)$$

式中: $u=a(k_1^2+\gamma^2)^{1/2}$ 、 $v=a(k_2^2+\gamma^2)^{1/2}$ 、 $\gamma=\alpha+j\beta$ 为传播常数; $J_n(\cdot)$ 为 n 阶第 1 类贝塞尔函数, $J'_n(\cdot)$ 为 $J_n(\cdot)$ 的导数; $H_n^{(2)}(\cdot)$ 为 n 阶第 2 类汉开尔函数, $H_n^{(2)'}(\cdot)$ 为 $H_n^{(2)}(\cdot)$ 的导数.

式(6)为关于复传播常数 γ 的超越方程,本文对其采用牛顿迭代法直接求解,得到非理想导体圆波导在 THz 频段的衰减常数和相位常数,因此求解得到的传播常数只有数值误差. 在具体数值计算中由于 v 值较大,计算中取 $H_n^{(2)'}(v)/H_n^{(2)}(v) \approx -j$,可以保证很高的精度.

在导体电导率较大($\omega\epsilon \ll \sigma_0$),且满足导体趋肤厚度 δ 远小于波导半径($\delta \ll a$)时,利用贝塞尔函数及汉开尔函数的渐近表示,对特征方程进行微扰近似,可得到非理想导体圆波导传播常数的近似解. 不

失一般性,给出圆波导 HE_{11} 模的传播常数^[11]

$$\gamma_{11}^2 \approx \frac{u_{11}^2}{a^2} - k_1^2 \quad (7)$$

式中

$$u_{11} = p_{11} + \Delta u_{11} \quad (8)$$

$$p_{11} = 1.841\ 2 \quad (9)$$

$$\Delta u_{11} \approx \mu_{r2} \frac{(k_1^2 a^2 - p_{11}^2) + p_{11}^4}{(1 - p_{11}^2)(-j p_{11} v)} \quad (10)$$

$$v = -k_2 a \quad (11)$$

3 计算结果及分析

对金属圆波导,取导体为铜,常温下的固有电导率 $\sigma_0=5.8\times10^7$ S/m,在 THz 频段采用电导率的经典弛豫效应模型,常温下的金属电子弛豫时间 $\tau=2.501\ 8\times10^{-14}$ s. 在圆波导取固定尺寸时,波导半径 $a=1$ mm,按理想导体分析时对应基模 TE_{11} 模的截止频率 $f_{c,TE_{11}}=87.85$ GHz.

3.1 金属电导率不同模型时的传播常数

对圆波导电导率分别采用常数电导率模型、简单弛豫效应模型和经典弛豫效应模型,并用特征方程法精确求解传播常数. 图 2 给出了 3 种不同电导率模型下,圆波导 HE_{11} 模传播常数随频率的变化情况. 由图 2 可见:当频率小于 1 THz 时,3 种电导率模型得到的衰减常数基本吻合;当频率大于 1 THz 时,常数电导率模型和简单弛豫效应模型高估了 THz 波的传输损耗,其中常数电导率模型相对于经典弛豫效应模型的误差先增大后减小,在 6 THz 时达到最大,约为 31%. 文献[4]在分析 THz 频段矩形波导时,电导率利用常数电导率模型得到的损耗比实际测试的大,与本文圆波导所得的结论是一致的. 无论矩形波导还是圆波导,其导体损耗与波导壁的表面阻抗成正比. 与电导率采用经典弛豫效应模型相比,采用常数电导率模型和简单弛豫效应模型

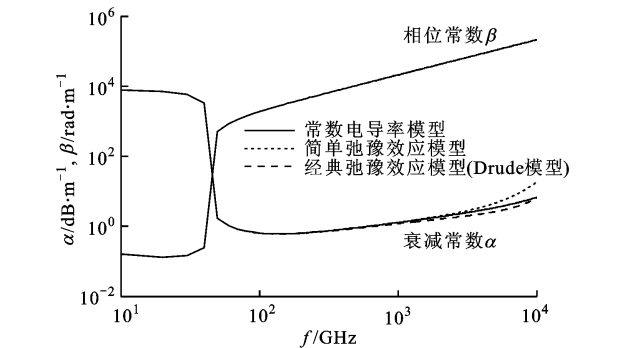


图 2 不同电导率模型下 HE_{11} 模的传播常数

时得到的表面阻抗较大,与实际测试结果相比,计算的导体损耗较大^[4]. 因此,在 THz 频段需要采用经典弛豫效应模型精确表征金属电导率的色散特性,否则将给 THz 高频段上的导波电特性参数带来误差.

3.2 不同计算方法时的传播常数

为了验证变分法及特征方程近似法的精度,本文采用金属电导率的经典弛豫效应模型,并且分别用变分法、特征方程精确求解及近似求解方法计算圆波导的传播常数. 图 3 给出了 3 种方法下 HE₁₁ 模传播常数随频率的变化情况. 由图 3 可见:在截止频率以下时,相位常数随频率增大而逐渐减小,衰减常数也呈微弱减小趋势;在截止频率以上时,衰减常数随频率增大先减小,而后逐渐增大,相位常数随频率增大单调增大. 为了比较 3 种方法的计算结果,图 4 给出了较高 THz 频段下衰减常数的变化情况. 由图 4 可见,随着频率升高,变分法解和特征方程近似法的解低估了导体损耗的大小,而且随着频率升高误差逐渐增大,传统变分法相对于精确解法的相对误差在 10 THz 时达到 66%. 考虑到频率升高时,非理想导体圆波导中的场分布将与理想导体波导中的场分布偏离,而变分法采用表面阻抗近似仅对圆波导

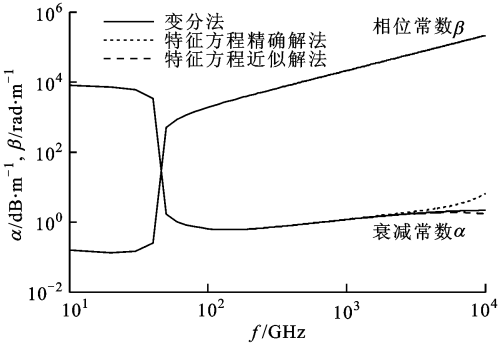


图 3 不同方法下 HE₁₁ 模的传播常数

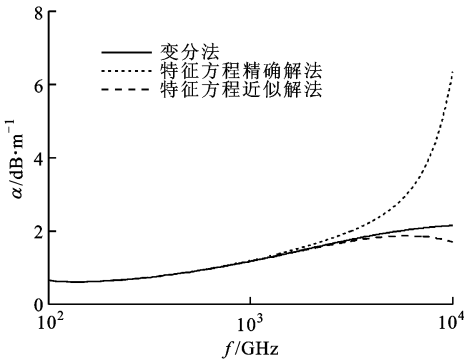


图 4 不同方法下 THz 高频段 HE₁₁ 模的衰减常数变化情况

空气导体界面的场进行了修正,因此随着频率升高,变分法对衰减常数的计算误差会显著增大;对于特征方程的近似求解,所要求的条件 $\omega\epsilon \ll \sigma_0$ 在高频时不再满足,因此对衰减常数的计算误差也会明显增大.

3.3 圆波导不同半径尺寸时的传播常数

采用金属电导率的经典弛豫效应模型及特征方程的精确求解方法计算传播常数. 图 5 给出了圆波导在不同半径下 HE₁₁ 模的衰减常数随频率的变化情况,其中波导半径 a 分别取 0.5、1.0 和 2.0 mm. 由图 5 可见,在相同工作频率下,随着波导内径的增大,HE₁₁ 模的衰减常数会减小,因此采用大孔径的圆波导有利于减小传输损耗. 这是因为大内径波导的 HE₁₁ 模电场分布在波导导体壁附近较小,导体损耗也会随之减小. 但是,大内径波导会引起高阶模传输,因此要考虑多模传输的影响.

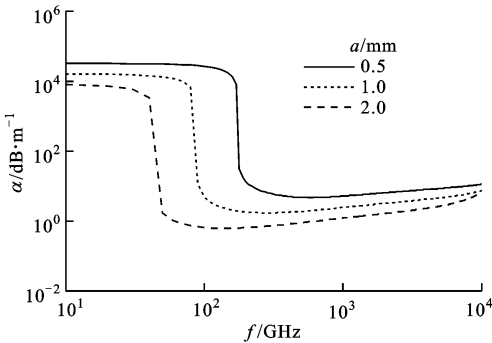


图 5 不同半径尺寸下 HE₁₁ 模的衰减常数变化情况

3.4 圆波导多模传输时的传播常数

采用金属电导率经典弛豫效应模型及特征方程精确求解方法计算传播常数. 图 6 给出了圆波导半径 $a=1.0$ mm 时,HE₁₁、TM₀₁、HE₂₁ 和 TE₀₁ 4 个模式的衰减常数随频率的变化情况. 由 6 图可见,频率较高时,高次模 TE₀₁ 模的衰减比基模 HE₁₁ 模小. 这是因为相同频率下,相对于 HE₁₁ 模的空间电场分布,TE₀₁ 模电场在圆波导金属壁附近较小,因此导体损耗也较小. 随着频率升高,TE₀₁ 模电场向波导内部收缩,因此其衰减随频率升高而显著减小. 采用基模 HE₁₁ 传输时,可考虑对圆波导进行介质涂敷来改善其场分布,使得在导体边界附近的场分布值尽量小,从而减小圆波导基模的导体损耗^[12]. 若采用低损耗的高次模 TE₀₁ 模传输,首先考虑利用圆对称场分布源在圆波导中能有效激励 TE₀₁ 模;其次若发生模式转换时,可从结构上设计干扰模式滤波器进行抑制,以满足好的 TE₀₁ 模纯度和传输效率^[13].

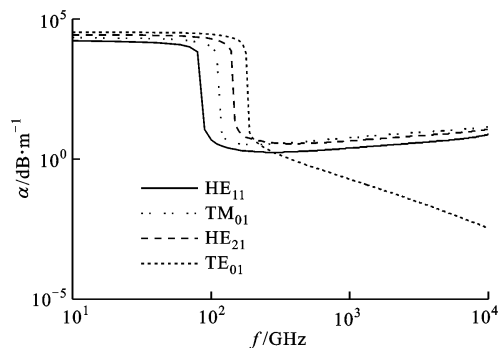


图6 圆波导多模传输时的衰减常数

4 结 论

本文在 THz 频段采用不同的金属电导率模型及不同求解方法计算圆波导的传播常数,并且对所得结果进行了比较和分析.在采用金属电导率经典弛豫效应模型及特征方程精确求解法计算传播常数时,可精确分析金属圆波导的传输特性,而采用其他电导率模型和计算方法时,在 THz 高频段存在明显误差.对圆波导在不同内径下的衰减常数及多模传输衰减特性的实验仿真结果表明:大内径波导更利于 THz 波传输;改善圆波导中传输模式场分布,有望减小其导体损耗.因此,在精确分析圆波导中 THz 波传输特性的基础上,有望从 THz 波导结构设计上实现低损耗 THz 波导.

参考文献:

- [1] MITROFANOV O, JAMES R, FERNANDEZ F A, et al. Reducing transmission losses in hollow THz waveguide [J]. IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology, 2011, 1 (1): 124-132.
- [2] JAMISON S P, MCGOWAN R W, GRISCHKOWSKY D. Single-mode waveguide propagation and reshaping of sub-ps terahertz pulses in sapphire fibers [J]. Applied Physics Letters, 2000, 76 (15): 1987-1989.
- [3] JEON T I, GRISCHKOWSKY D. Direct optoelectronic generation and detection of sub-ps-electrical pulses on sub-mm-coaxial transmission lines [J]. Applied Physics Letters, 2004, 85 (25): 6092-6094.
- [4] ZHOU Yun, LUCYSZYN S. HFSS modelling anomalies with THz metal-pipe rectangular waveguide structures at room temperature [EB/OL]. [2011-09-12].

<http://www.piers.org/piersonline/piers.php?volume=5&number=3&page=201>.

- [5] MITROFANOV O, TAN T, MARK P R, et al. Waveguide mode imaging and dispersion analysis with terahertz near-field microscopy [J]. Applied Physics Letters, 2009, 94 (17): 171104. 1-171104. 3.
- [6] 谭晓玲, 耿优福, 周骏, 等. THz 波在金属镀层空芯波导中传输的理论和实验研究 [J]. 物理学报, 2011, 60 (5): 054101. 1-054101. 5.
TAN Xiaoling, GENG Youfu, ZHOU Jun, et al. Theoretical and experimental study on transmission properties of THz wave in metal-coated hollow waveguide [J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60 (5): 054101. 1-054101. 5.
- [7] 冯国柱, 杨华军. 有关金属自由电子气模型的光学性质及计算机仿真 [J]. 西南民族大学学报, 2005, 31 (2): 217-221.
FENG Guozhu, YANG Huajun. Optics nature of free electron model of metal and simulation [J]. Journal of Southwest University for Nationality, 2005, 31 (2): 217-221.
- [8] COLLIN R E. Field theory of guide waves [M]. New York, USA: McGraw-Hill, 1960: 182-195.
- [9] 刘媛萍, 黄斌科, 姜万顺, 等. 金属涂覆层对圆波导传输特性的影响分析 [J]. 西安交通大学学报, 2009, 43 (10): 76-80.
LIU Yuanping, HUANG Blnke, JIANG Wanshun, et al. Effects of the coated lossy layer on the propagation characteristic of electromagnetic wave in a metal cylindrical waveguide [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43 (10): 76-80.
- [10] STRATTON J A. Electromagnetic theory [M]. New York, USA: McGraw-Hill, 1941: 526-530.
- [11] ROVETTA D, BOSISIO A V. Propagation constant of HE₁₁ mode near the cutoff frequency in a circular waveguide [J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2006, 16 (5): 314-316.
- [12] MITROFANOV O, JAMES A H. Dielectric-lined cylindrical metallic THz waveguides: mode structure and dispersion [J]. Optics Express, 2010, 18 (3): 1898-1903.
- [13] HASHIMOTO K. Circular TE_{0n} mode filters for guided millimeter-wave transmission [J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1976, 24 (1): 25-31.

(编辑 刘杨)